CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations du problème

Soit n un entier naturel non nul, $M_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ un élément de $M_n(\mathbb{R})$.

i indique le numéro de la ligne de a_{ij}.

j indique le numéro de la colonne de a_{ij}.

On appelle trace de A et on note $tr(A)$ le nombre réel $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

$GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

$S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques.

$A_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tA = -A$.

PARTIE I

1) Montrer que l'application tr est une application linéaire.

2) Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$.
Est-ce que l'on a $tr(AB) = tr(A)\,tr(B)$?
Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.

3) Soit P dans $GL_n(\mathbb{R})$ et A dans $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $tr(P^{-1}A\,P) = tr(A)$.

4) Soit A et B, 2 matrices semblables.
Que peut-on dire de leurs polynômes caractéristiques ?
Que représente $tr(A)$ relativement aux coefficients du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A ?
Retrouver ainsi le résultat de la question 3).

Tournez la page S.V.P.

5) Existe-t-il des matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que AB - BA = 2 I_n ?

6) Soit A $\in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(A) = 0$.

PARTIE II

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On définit $< A, B > = tr({}^tA.B)$.

1) Montrer que l'application

$$M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(A,B) \to < A, B >$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

On considèrera l'espace vectoriel euclidien $(M_n(\mathbb{R}), < >)$ pour toute la suite et $\|A\| = \sqrt{< A, A >}$ la norme associée.

On vérifiera que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

2) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et A $\in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que <S,A> = 0.

En déduire que $A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

4) Soit A$\in M_n(\mathbb{R})$ et $A=A'+A''$ l'unique décomposition de A selon la somme directe $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Justifier que $\forall M, M \in S_n(\mathbb{R}), \|A-M\|^2 \geq \|A-A'\|^2$.

En déduire que

$$\inf_{M \in S_n(R)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - m_{ij})^2 = \left\| \frac{{}^tA - A}{2} \right\|^2 .$$

5) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (1-x)^2 + (4-z)^2 + (2-y)^2 + (3-y)^2$.

Montrer que f a un minimum absolu que l'on calculera. On précisera en quel point ce minimum est atteint.

6) Soit A, B, C dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$ et ${}^tBB = B{}^tB$.

Calculer $\|AC - CB\|^2$ et $\|{}^tAC - C{}^tB\|^2$.

A l'aide de I. 2) vérifier que

$$\|{}^tAC - C{}^tB\|^2 - \|AC - CB\|^2 = 0$$

En déduire que $(AC = CB) \Leftrightarrow ({}^tAC = C{}^tB)$.

PARTIE III

L'objectif de cette partie est d'établir la propriété suivante par récurrence sur n.
A(n) : soit $\{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ un ensemble de p matrices carrées d'ordre n symétriques permutant 2 à 2 :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2, S_i S_j = S_j S_i$$

Alors il existe une matrice orthogonale Ω d'ordre n telle que
$\forall i \in \{1,\ldots,p\}$, $\Omega^{-1} S_i \Omega$ soit une matrice diagonale.

1) Que peut-on dire de la propriété pour n = 1 ?

2) On suppose que n est supérieur ou égal à 2 et que la propriété est vraie jusqu'au rang (n-1).
Les matrices symétriques $S_1, \ldots, S_p$ d'ordre n permutent 2 à 2.

2.1) Que peut-on dire si toutes les matrices $S_1, \ldots, S_p$ sont diagonales ?

2.2) On suppose dans toute la suite que S_1 n'est pas une matrice diagonale. Justifier l'existence d'un entier r, d'un réel λ, d'une matrice diagonale Δ d'ordre n-r et d'une matrice orthogonale Ω_1 d'ordre n tels que : $1 \le r \le n-1$, $\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 = \begin{bmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}$ où 0 désigne des blocs nuls et où λ ne figure pas sur la diagonale de Δ.

2.3) Pour $1 \le i \le p$, on écrit la matrice $\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1 = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{bmatrix}$ sous forme de 4 blocs où A_i est carré d'ordre r et C_i carré d'ordre n-r.

Montrer que $D_i = {}^t B_i$ et que A_i et C_i sont symétriques.

2.4) Pour $1 \le i \le p$, montrer que $S_1 S_i = S_i S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda B_i = B_i \Delta \\ \Delta C_i = C_i \Delta \end{cases}$.

En déduire que B_i et D_i sont des blocs nuls.

2.5) Montrer que $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2$

$$S_i S_j = S_j S_i \Leftrightarrow \begin{cases} A_i A_j = A_j A_i \\ C_i C_j = C_j C_i \end{cases}$$

2.6) En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\{A_1, \ldots, A_p\}$ et à $\{C_1, \ldots, C_p\}$ terminer la démonstration.

Tournez la page S.V.P.

3) On considère les deux ensembles de matrices d'ordre deux $\{A_1, A_2, A_3\}$ et $\{C_1, C_2, C_3\}$ définis par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3.1) Vérifier que ces deux ensembles vérifient l'hypothèse figurant dans A(n) au début de la partie III et donner un exemple de matrices orthogonales Ω_2 et Ω'_2 telles que $\Omega_2^{-1} A_i \Omega_2$ et $(\Omega'_2)^{-1} C_i \Omega'_2$ soient des matrices diagonales à préciser.

3.2) Soit les matrices d'ordre 4 écrites par blocs $S_i = \begin{bmatrix} A_i & O \\ O & C_i \end{bmatrix}$, $1 \le i \le 3$.

Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres communs à S_1, S_2, S_3 et indiquer les valeurs propres correspondantes pour chaque matrice.

Fin de l'énoncé